



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

05F

D

دوپینگ ماز

@Doping_Maze | @BioMazeFree

@Doping_Maze | @BioMazeFree

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۲/۲۸

دفترچه پاسخ ریاضی

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح	ویراستار
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنونند
	مهدی حاجی نژادیان

۱- در تجزیه عبارت $(2x-1)^3 - 4(2x-1)^2 + (2x-1) - 4$ کدام عامل دیده می شود؟

$$2x+5 \quad (4)$$

$$4x+3 \quad (3)$$

$$2x-5 \quad (2)$$

$$4x-3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

تجزیه یک چندجمله‌ای یعنی عبارت را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم به طوری که عبارت‌های به دست آمده تجزیه نشوند. در این تست در ابتدا فرض می‌کنیم $2x-1=A$ در این صورت:

$$A^3 - 4A^2 + A - 4 = (A^3 + A) + (-4A^2 - 4)$$

$$= A(A^2 + 1) - 4(A^2 + 1) = (A - 4)(A^2 + 1)$$

حال A را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow (2x-1-4)((2x-1)^2+1) = (2x-5)(4x^2-4x+2)$$

چون در عبارت $4x^2-4x+2$ مقدار Δ منفی است، پس دیگر عبارت قابل تجزیه نمی‌باشد لذا تجزیه آن $(2x-5)(4x^2-4x+2)$ است. روش دوم: عددگذاری:

ریشه هر یک از گزینه‌ها را در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم، اگر برابر صفر شد بر آن عبارت بخش پذیر است.

$$2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right)=64-64+4-4=0.$$

گزینه ۲:

$$2- \text{ اگر } \frac{12}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \text{ برای هر عدد حقیقی } x \neq 2 \text{ برقرار باشد، مقدار } A \text{ کدام است؟}$$

$$2 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

پاسخ: گزینه ۱

وقتی عبارتی برای هر $x \neq 2$ برقرار باشد، درواقع در مجموعه $\mathbb{R} - \{2\}$ اتحاد است به همین جهت دو روش حل داریم: روش اول:

$$\frac{12}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} = \frac{A(x^2+2x+4) + (x-2)(Bx+C)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

ابتدا صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C = (A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A-2C$$

چون اتحاد است پس صورت ساده شده را با ۱۲ متحد قرار می‌دهیم بدین ترتیب که:

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ 2A-2B+C=0 \Rightarrow 2A+2A+C=0 \Rightarrow 4A+C=0 \\ 4A-2C=12 \end{cases}$$

$$2C = -12 \Rightarrow C = -6 \Rightarrow A = 1$$

روش دوم: چون در $\mathbb{R} - \{2\}$ اتحاد است، پس به جای x اعداد مناسبی می‌توانیم قرار دهیم:

$$x=0, \quad -\frac{12}{8} = -\frac{A}{2} + \frac{C}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{A}{2} + \frac{C}{4} \Rightarrow -2A + C = -6$$

$$x=1, \quad \frac{12}{-7} = -A + \frac{B+C}{7} \Rightarrow B+C-7A = -12$$



$$x = -1 \quad \frac{12}{-9} = \frac{A}{-3} + \frac{-B+C}{3} \Rightarrow -A+C-B=-4$$

با حل ۳ معادله‌ی ۳ مجهول مقادیر A, B, C به دست می‌آید.
دقت کنید به جای ۱, ۰, ۱, - می‌توانیم اعداد دیگری هم قرار دهیم.

$$-۳ \quad \text{اگر } x^3 + 3xy^2 = 36 \text{ و } y^3 + 3yx^2 = 28 \text{ مقدار } \frac{x+y}{x-y} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{4} (۴) \quad \frac{1}{4} (۳) \quad \frac{1}{4} (۲) \quad \frac{1}{4} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

با توجه به دو تساوی داده شده داریم:

$$x^3 + 3xy^2 = 36 \quad \xrightarrow{+} \quad x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 36 + 28$$

$$3x^2y + y^3 = 28$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 = 64 \Rightarrow x+y = 4$$

$$x^3 + 3xy^2 = 36 \quad \xrightarrow{-} \quad x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 36 - 28$$

$$3x^2y + y^3 = 28$$

$$(x-y)^3 = 8 \Rightarrow x-y = 2$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = 2$$

۴- اگر برای دو عدد حقیقی a, b شرط a = 1 + b برقرار باشد، ساده شده a³ - b³ کدام است؟

$$1 + 3ab (۴)$$

$$1 - 3ab (۳)$$

$$1 - ab (۲)$$

$$3ab - 1 (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

با توجه به آنکه:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

از طرفی a - b = 1 پس:

$$a^3 - b^3 = 1^3 + 3ab \times 1 \Rightarrow a^3 - b^3 = 1 + 3ab$$

روش دوم: عددگذاری:

$$\text{با فرض } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a^3 - b^3 = 8 - 1 = 7$$

اگر a = 2 و b = 1 را در گزینه‌ها جایگزین کنیم، فقط گزینه ۴ برابر ۷ می‌شود.

$$۵- \text{اگر } A = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ مقدار } (A + \frac{1}{A})^2 \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{37}{6} (۴)$$

$$7 + 4\sqrt{3} (۳)$$

$$4 (۲)$$

$$\frac{49}{6} (۱)$$



پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آنکه $(A + \frac{1}{A})^2 = A^2 + \frac{1}{A^2} + 2$ کافی است، مقدار A^2 را پیدا کنیم.

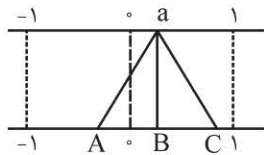
$$A^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = 2 + \cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$A^2 = 4 + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \Rightarrow A^2 = 6$$

پس:

$$(A + \frac{1}{A})^2 = A^2 + \frac{1}{A^2} + 2 = 6 + \frac{1}{6} + 2 = 8 + \frac{1}{6} = \frac{49}{6}$$



۶- با توجه به مقدار a در شکل مقابل سه تایی (A, B, C) کدام می تواند باشد؟

$$(-a, \sqrt{a}, \sqrt{a})^{(2)}$$

$$(-\sqrt{a}, \sqrt{a}, a^2)^{(1)}$$

$$(-\sqrt{a}, a^2, a^3)^{(4)}$$

$$(-\sqrt{a}, a^3, \sqrt{a})^{(3)}$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $0 < a < 1$ آنگاه:

$$\dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$$

با توجه به اینکه $0 < a < 1$ داریم: $x_B < x_C$ پس گزینه های ۱ و ۲ و ۴ رد می شوند اما گزینه ۳ را بررسی می کنیم وقتی $0 < a < 1$ آنگاه:

$$0 < a^3 < \sqrt{a}$$

اما $-\sqrt{a} < 0 < a^3 < \sqrt{a}$ به همین شکل ترتیب $-\sqrt{a} < 0 < a^3 < \sqrt{a}$ صحیح است.

۷- ساده شده $\frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}$ کدام عدد است؟

$$\frac{1}{\sqrt{6}}^{(4)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}}^{(3)}$$

$$\frac{1}{2}^{(2)}$$

$$\frac{1}{4}^{(1)}$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: برای گویا کردن مخرج کسر داریم: $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

ابتدا مخرج تک تک کسرها را به کمک اتحاد مزدوج گویا می کنیم به همین جهت داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{1}}{\sqrt{2}-2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} \times \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{2-4} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} + \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{48-36} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-2} + \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{4}}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $6x^2 - 9x + m = 0$ و $\frac{2}{\alpha} - 1$ و $\frac{2}{\beta} - 1$ ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، مقدار m کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر α و β ریشه‌ها (صفرهای) معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، اولاً α و β در معادله صدق می‌کنند، ثانیاً:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

با توجه به آنکه α و β ریشه‌های معادله $6x^2 - 9x + m = 0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = \frac{m}{6} \end{cases}$$

از طرفی $\frac{2}{\alpha} - 1$ و $\frac{2}{\beta} - 1$ ریشه‌های $x^2 - 7x + 4 = 0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \frac{2}{\alpha} - 1 + \frac{2}{\beta} - 1 = 7 \Rightarrow \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = 9 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{9}{2} \\ (\frac{2}{\alpha} - 1)(\frac{2}{\beta} - 1) = 4 \Rightarrow \frac{4}{\alpha\beta} - 2(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + 1 = 4 \Rightarrow \frac{4}{\alpha\beta} - 9 + 1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\alpha\beta} = 12 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{m}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = 2$$

۹- هرگاه α و β ریشه‌های $x^2 - x + 3m = 0$ باشند، به‌طوری‌که $\frac{\alpha}{3-\beta} = \frac{3}{5}$ ، مقدار m چه عددی است؟

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آنگاه

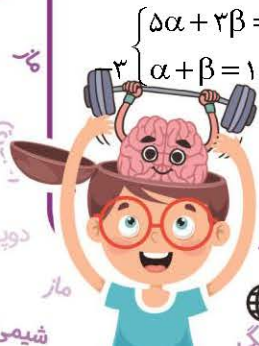
چون α و β ریشه‌های $x^2 - x + 3m = 0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = 3m \end{cases}$$

از طرفی $\frac{\alpha}{3-\beta} = \frac{3}{5}$ به همین جهت $5\alpha = 9 - 3m$ پس:

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\beta = 9 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\beta = -2$$



پس:

$$\alpha\beta = 3m \Rightarrow -6 = 3m \Rightarrow \underline{m = -2}$$

۱۰- اگر $\alpha, \beta, 1$ سه ریشه معادله $x^3 - ax^2 + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

اگر x ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد، آنگاه $f(x) = 0$ یعنی ریشه در معادله صدق می‌کند.

چون $x = 1$ ریشه یا صفر معادله $x^3 - ax^2 + 1 = 0$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$1^3 - a(1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

چون $x = 1$ ریشه معادله است، پس در تجزیه عبارت، عامل $x - 1$ دیده می‌شود.

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

با این مقدمه مشخص است α و β ریشه‌های $x^2 - x - 1 = 0$ هستند که نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -1 \quad \alpha\beta = -1$$

حاصل $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$ را می‌خواهیم، پس:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{-1} = -1$$

۱۱- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + 3ax + 3$ محور x ها را در دو نقطه با طول منفی قطع می‌کند، حدود a کدام است؟

(۴) $a > \frac{4}{3}$

(۳) $-\frac{4}{3} < a < 0$

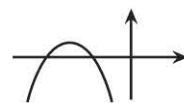
(۲) $0 < a < \frac{4}{3}$

(۱) $a > 0$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای آنکه سهمی $y = ax^2 + bx + c$ دارای ۲ ریشه منفی باشد.

مطابق شکل:



یا



باید برای $\alpha < 0$ و $\beta < 0$ که ریشه‌های معادله هستند، شرط‌های $\alpha + \beta < 0$ و $\alpha\beta > 0$ و $\Delta > 0$ برقرار باشد.

اما حل تست: $\alpha, \beta < 0$ پس:

$$\alpha\beta > 0 \Rightarrow \frac{3}{a} > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\Delta = 9a^2 - 12a > 0 \Rightarrow 3a(3a - 4) > 0 \Rightarrow 3a - 4 > 0$$

$$\Rightarrow a > \frac{4}{3}$$

دقت کنید $-\frac{b}{a} = -3$ یعنی همواره جمع ۲ ریشه منفی است.

با همهی این مقدمات $a > \frac{4}{3}$ جواب نهایی است.



۱۲- نمودار سهمی $y = mx^2 + (3-m)x + 1$ از تمامی نواحی مختصات، به جز ناحیه سوم عبور می کند. حدود m کدام است؟

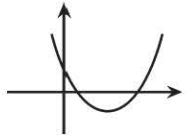
$m > 9$

$3 < m < 9$

$0 < m < 9$

$0 < m < 3$

پاسخ: گزینه ۴



نمودار سهمی که فقط از ناحیه سوم عبور نکند شبیه شکل مقابل است.

با توجه به نمودار مشخص است که سهمی باید دارای $\min$ باشد، پس $a > 0$.

از طرفی $f(0) > 0$ پس $c > 0$ در ضمن $f'(0) < 0$ پس $b < 0$ یعنی علامت a, b, c معلوم است و البته باید $\Delta > 0$.

$a > 0 \Rightarrow m > 0$

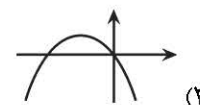
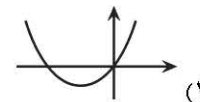
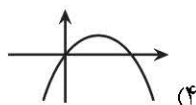
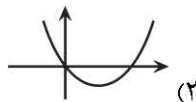
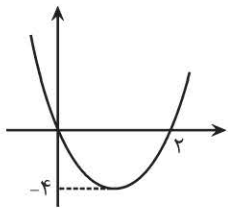
$b < 0 \Rightarrow 3 - m < 0 \Rightarrow m > 3$

$c > 0 \Rightarrow 1 > 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = 9 + m^2 - 6m - 4m > 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m < 1 \end{cases}$ غ ق

$(m > 0, m > 3, m > 9) \Rightarrow m > 9$

۱۳- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx$ شکل مقابل است. نمودار تابع $g(x) = bx^2 + ax$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

با توجه به نمودار داده شده چند گزاره درست به دست می آید.

(۱) $f(2) = 0$ پس $4a + 2b = 0$

(۲) طول رأس $x = 1$ است پس $f(1) = -4$ یعنی $a + b = -4$

با حل دستگاه داریم:

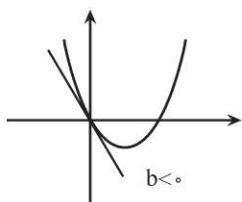
$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -4 \end{cases}$

$a = 4, b = -8$

$g(x) = -8x^2 + 4x$

اما در تابع $y = g(x)$ داریم:

اولاً تابع g دارای $\max$ است. ثانیاً $g(x) = 4x(1 - 2x) = 0$ یعنی $g(x) = 0$ نتیجه می دهد که $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ ریشه ها هستند و تنها گزینه قابل قبول گزینه ۴ است.

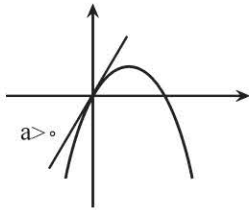


روش دوم: تقعر $f(x)$ رو به بالاست، پس $a > 0$ است.

شیب مماس در مبدأ منفی است، پس $b < 0$ است.



بنابراین در نمودار $g(x)$ ، باید تقعر رو به پایین و شیب مماس در مبدأ نیز مثبت باشد که فقط گزینه ۴ به این صورت است.



۱۴- هرگاه بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 - 2bx + c = 0$ شرط $a + b = \frac{-c}{4}$ برقرار باشد، کدام عدد می‌تواند ریشه آن باشد؟

$\frac{2c}{a}$ (۴)

$\frac{-c}{2a}$ (۳)

$\frac{c}{a}$ (۲)

$\frac{-2c}{a}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا شرط داده شده را به صورت $4a + 4b + c = 0$ تبدیل می‌کنیم. اگر به شرط داده شده و معادله داده شده دقت کنید متوجه می‌شوید به جای x عدد -2 قرار داده‌ایم و معادله برقرار شده، یعنی یکی از ریشه‌های معادله $x = -2$ است. از طرفی:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -2 x_2 = \frac{c}{a}$$

پس ریشه دیگر معادله $x = \frac{-c}{2a}$ است.

۱۵- به ازای کدام مقدار m خط $y = 3x - 6$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+3)x + m$ مماس است؟

-4 و -12 (۴)

-4 و 12 (۳)

-12 و 4 (۲)

12 و 4 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: یک خط به شرطی بر یک نمودار مماس است که معادله حاصل از تلاقی آنها ریشه مضاعف داشته باشد. ابتدا معادله سهمی را با خط داده شده تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = 2x^2 + (m+3)x + m \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+3)x + m = 3x - 6$$

$$\Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

برای آنکه معادله حاصل، ریشه مضاعف داشته باشد باید $\Delta = 0$ پس:

$$\Delta = m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-12) = 0$$

$$\begin{cases} m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ریشه مضاعف} \\ m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ریشه مضاعف} \end{cases}$$

یعنی اگر $m = -4$ ، خط بر سهمی در $x = 1$ مماس است.

یعنی اگر $m = 12$ ، خط در $x = -3$ بر سهمی مماس است.

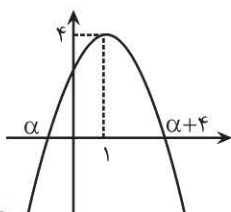
۱۶- نمودار سهمی $y = f(x)$ به صورت مقابل است. مقدار $f(0)$ کدام است؟

$\frac{7}{2}$ (۱)

$\frac{8}{3}$ (۲)

3 (۳)

2 (۴)



پاسخ: گزینه ۳

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است: به طوری که هر خط افقی که نمودار سهمی را در نقاط A و B قطع کند آنگاه:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_A + x_B = \frac{-b}{a}$$

خط $x = 1$ محور تقارن سهمی است پس $S \Big|_4^1$ رأس سهمی است. از طرفی $x = 1$ وسط ۲ ریشه است، یعنی:

$$\frac{\alpha + \alpha + 4}{2} = 1 \Rightarrow 2\alpha + 4 = 2 \Rightarrow \underline{\alpha = -1}$$

یعنی ریشه‌های معادله $\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ هستند به همین جهت:

$$f(x) = a(x+1)(x-3)$$

$$S \Big|_4^1 \in f \Rightarrow 4 = a \times 2 \times -2 \Rightarrow \underline{a = -1}$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x+1)(x-3) \Rightarrow \underline{f(0) = 3}$$

۱۷- خودرویی مسیر ۱۲۰۰ کیلومتری بین دو شهر را رفته و برگشته است. به طوری که زمان رفت ۵ ساعت بیشتر از زمان بازگشت است، اگر سرعت رفت ۸۰ کیلومتر در ساعت باشد، در برگشت پس از ۲ ساعت چه کسری از مسیر را آمده است؟

$$\frac{1}{9} (4) \quad \frac{1}{8} (3) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{1}{6} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

در این گونه مسائل سرعت را ثابت در نظر می‌گیریم و داریم:

به همین جهت معادله‌ای بر حسب زمان می‌نویسیم، اگر V_p سرعت ثابت در مسیر بازگشت باشد، داریم:

$$t_1 - t_2 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{80} - \frac{1200}{V_p} = 5 \Rightarrow \frac{1200}{V_p} = 10 \Rightarrow V_p = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$x = V \cdot t \Rightarrow x = 120 \times 2 = 240 \text{ km}$$

در زمان برگشت طی ۲ ساعت ۲۴۰ کیلومتر حرکت کرده است و در نتیجه $\frac{240}{1200} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ یعنی $\frac{1}{5}$ مسیر را طی کرده است.

۱۸- سرعت تایپ علیرضا دو برابر سرعت تایپ احسان است. این دو نفر با هم در ۸ ساعت متنی را تایپ می‌کنند. اگر هر کدام به تنهایی تایپ کنند، اختلاف زمان تایپ آنها چقدر است؟

$$24 (1) \quad 16 (2) \quad 12 (3) \quad 8 (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنیم علیرضا به تنهایی در n ساعت کار را به تنهایی تمام کند چون سرعت علیرضا دو برابر سرعت احسان است پس احسان به تنهایی در ۲n ساعت کار را تمام می‌کند پس علیرضا هر ساعت $\frac{1}{n}$ و احسان هر ساعت $\frac{1}{2n}$ ساعت کار می‌کنند.



اگر هر دو نفر با هم ۸ ساعت کار کنند کار تمام است یعنی:

$$8 \times \frac{1}{n} + 8 \times \frac{1}{2n} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{n} + \frac{4}{n} = 1 \Rightarrow \underline{n = 12}$$

یعنی علیرضا به تنهایی ۱۲ ساعت و احسان به تنهایی ۲۴ ساعت کار را تمام می کنند پس اختلاف زمان آنها ۱۲ ساعت است.

۱۹- اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین ریشه معادله ی $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$ چه قدر است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

این معادله درجه ۲ نیست اما با تغییر متغیر $x^2 - 2x = A$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می شود پس:

$$A^2 - 11A + 24 = 0 \quad \begin{cases} A = 8 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 8 \Rightarrow x^2 - 2x = 8 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \quad \begin{cases} x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$A = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \quad \begin{cases} x-1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

اگر ریشه ها (صفرهای) معادله را به ترتیب مرتب کنیم اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین صفر معادله ۶ واحد است.

۲۰- هرگاه $\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a-4} = 1$ مقدار $a + \sqrt{2a-3}$ چه عددی است؟

۹ (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله گنگ را حل می کنیم برای این منظور داریم:

$$\sqrt{2a+1} = 1 + \sqrt{2a-4} \Rightarrow \cancel{\sqrt{a}} + \cancel{1} = \cancel{1} + \cancel{\sqrt{a}} - 4 + 2\sqrt{2a-4}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{2a-4} \Rightarrow 4 = 2a - 4 \Rightarrow a = 4$$

با توجه به شرایط معادله گنگ، این جواب قابل قبول است.

مقدار به دست آمده را در عبارت نهایی قرار می دهیم.

$$a + \sqrt{2a-3} = 4 + 3 = 7$$

۲۱- حاصل ضرب جواب های معادله $x(x-5) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$ کدام است؟

-۵ (۴) ۳ (۳) -۳ (۲) ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر کمی دقت کنید می توانید با یک تغییر متغیر مناسب معادله را ساده کنیم به طوری که:

$$x^2 - 5x = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

اگر فرض کنیم $x^2 - 5x = A$ آنگاه معادله گنگ را به صورت $A = \sqrt{A+6}$ می توانیم بنویسیم.

$$A^2 = A + 6 \Rightarrow A^2 - A - 6 = 0 \quad \begin{cases} A = 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 3 \Rightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \\ A = -2 \text{ غنی} \end{cases}$$



بدون آنکه معادله $x^2 - 5x - 3 = 0$ را حل کنیم بدیهی است معادله دارای ۲ ریشه متمایز است به طوری که $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ پس حاصل ضرب ریشه‌ها -۳ است.

۲۲- به ازای کدام مقادیر a ، عبارت $ax^2 - 6x + 2a + 3$ برای هر مقدار دلخواه x ، مثبت است، حدود a کدام است؟

$$0 < a < 3 \quad (4)$$

$$a > 3 \quad (3)$$

$$a > \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$0 < a < \frac{3}{2} \quad (1)$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

پاسخ: گزینه ۲

نکته: $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شرطی برای هر مقدار x مثبت است که $\Delta < 0$ به طوری که $a > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

برای آنکه عبارت $ax^2 - 6x + 2a + 3$ همواره مثبت باشد آنگاه:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow a > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 36 - 4a(2a + 3) < 0 \Rightarrow 9 - 2a^2 - 3a < 0 \end{cases}$$

$$2a^2 + 3a - 9 > 0 \Rightarrow (2a - 3)(a + 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{3}{2} \\ a < -3 \end{cases} \text{ غلط}$$

پس در نهایت از $(a > 0, a > \frac{3}{2})$ نتیجه می‌گیریم $a > \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

۲۳- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+5}{x^2-x+2} \geq 1$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آنکه $x^2 - x + 2 > 0$ (زیرا $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است) می‌توانیم طرفین نابرابری را در $x^2 - x + 2$ ضرب کنیم و جهت نابرابری عوض نشود پس داریم:

$$\frac{x+5}{x^2-x+2} \geq 1 \Rightarrow x+5 \geq x^2-x+2 \Rightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

جواب بازه $[-1, 3]$ است پس $b-a = 4$ است.



۲۴- نمودار تابع $f(x) = |x-4| - |x+2|$ محورهای مختصات را در نقاط A, B قطع می‌کند اگر O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB چه عددی است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

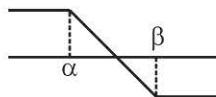
$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

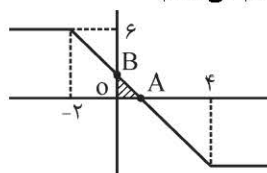
پاسخ: گزینه ۱

نکته: با فرض $\alpha < \beta$ نمودار تابع $f(x) = |x-\beta| - |x-\alpha|$ به صورت مقابل است.



@Doping_Maze | @BioMazeFree

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-4| - |x+2|$ را رسم می‌کنیم.



در این تست مساحت مثلث OAB را می‌خواهد.

$$f(4) = -6, \quad f(-2) = 6$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow |x-4|=|x+2| \begin{cases} x-4=x+2 & \text{غلق} \\ x-4=-x-2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$S=1 \quad \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| \text{ با این مقدمات } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

۲۵- اختلاف ریشه‌های معادله $2|x+2| + |x| = 6$ چقدر است؟

@Doping_Maze | @BioMazeFree

$$4 \quad (4)$$

$$\frac{8}{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

به کمک تعیین علامت عبارات داخل قدرمطلق معادله را حل می‌کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow 2(x+2) + x = 6 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 2(x+2) - x = 6 \Rightarrow x = 2 \quad \text{غلق}$$

$$x \leq -2 \Rightarrow -2(x+2) - x = 6 \Rightarrow -3x = 10 \Rightarrow x = \frac{-10}{3} \quad \checkmark$$

معادله داده شده دارای ۲ ریشه $x = \frac{2}{3}$ و $x = \frac{-10}{3}$ است پس:

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = \left| \frac{2}{3} - \left(\frac{-10}{3} \right) \right| = \frac{12}{3} = 4$$

۲۶- چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{x}{x-4} \leq \frac{1}{x}$ صدق می‌کند؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳



ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x-4)}{x(x-4)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 4}{x(x-4)} \leq 0$$

دقت کنید صورت دارای $\Delta < 0$ است پس همواره موافق علامت ضرب x^2 است پس صورت کسر همیشه مثبت است. به همین جهت باید مخرج منفی باشد یعنی:

$$x(x-4) < 0 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow$$

۱، ۲، ۳ اعداد صحیح هستند که در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۷- تابع $y = |x-2| + |x|$ در بازه (a, b) اکیداً یکنوا و نمودار آن زیر خط $y = 4 - x$ است. حداکثر $b - a$ کدام است؟

۴ (۴)

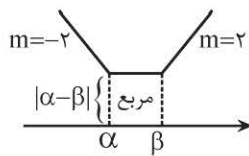
۳ (۳)

۲ (۲)

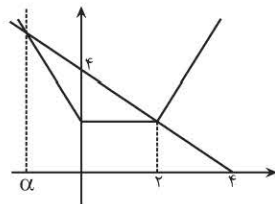
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: نمودار تابع $f(x) = |x-\alpha| + |x-\beta|$ که آن را گلدانی می‌گوییم به صورت مقابل است:



ابتدا نمودار $y = |x-2| + |x|$ و خط $y = 4 - x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



قرار است $y = |x-2| + |x|$ اکیداً یکنوا باشد پس $x \leq 0$ یا $x \geq 4$ اما طبق صورت سؤال باید زیر خط $y = 4 - x$ باشد پس جواب بازه $[\alpha, 0]$ است. برای یافتن α داریم:

$$\begin{cases} x < 0: y = -(x-2) - x = -2x + 2 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$4 - x = -2x + 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow [-2, 0] \text{ جواب}$$

پس

حداکثر مقدار $b - a$ همان ۲ است.

۲۸- اگر $a > 0$ سطح بین نمودار $f(x) = |x-a|$ و $g(x) = 2a - |x|$ کدام است؟

$\frac{5}{2}a^2$ (۴)

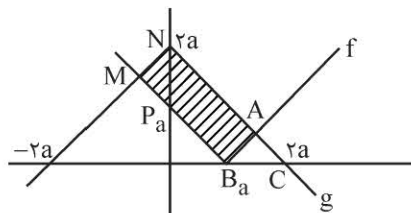
$\frac{3}{2}a^2$ (۳)

$2a^2$ (۲)

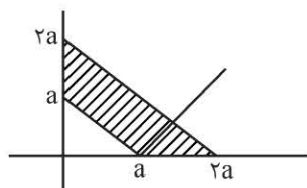
a^2 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار $y = |x|$ و با توجه به شرط $a > 0$ نمودار f و g را رسم می‌کنیم.



مساحت دو مثلث ABC و MNP با هم برابر است، پس می‌توانیم مثلث MNP را به جای ABC جایگزین کنیم. لذا سطح سایه خورده به شکل مقابل تبدیل می‌شود.



$$S = \frac{1}{2}(2a)(2a) - \frac{1}{2}a \times a$$

$$S = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

۲۹- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = 4x^2 - 4x$ باشد بخشی از نمودار تابع $f \circ g(x)$ بر کدام خط منطبق است؟

$$2x+1(4)$$

$$2+2x(3)$$

$$2x-1(2)$$

$$-2x-1(1)$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ضابطه تابع مرکب $y = f \circ g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = |2x - 1|$$

پس تابع $y = f \circ g(x)$ یک تابع دوطرفه‌ای به صورت $f \circ g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$ است، به همین جهت بخشی از نمودار آن بر

خط $y = 2x - 1$ منطبق است.

۳۰- یکی از ریشه‌های معادله $|x-a| + |x-3| = 6$ برابر $x = 4$ است ریشه دیگر کدام است؟

$$x = -8 \text{ و } x = 2(4)$$

$$x = 8(3)$$

$$x = 8 \text{ یا } x = -2(2)$$

$$x = -2(1)$$

پاسخ: گزینه ۲

چون $x = 4$ ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند به همین جهت:

$$|4-a| + |4-3| = 6 \Rightarrow |a-4| = 5 \begin{cases} a-4=5 \\ a-4=-5 \end{cases}$$

$$a-4=5 \Rightarrow a=9$$

$$a-4=-5 \Rightarrow a=-1$$

اگر:

$$a=9 : |x-9| + |x-3| = 6$$

نکته: در نمودار گلدانی $y = |x-a| + |x-b|$ خط $x = \frac{a+b}{2}$ محور تقارن است. چون $x = \frac{9+3}{2} = 6$ محور تقارن است و $x = 4$ ریشه معادله است پس ریشه دیگر $x = 8$ است.

$$a=-1 : |x+1| + |x-3| = 6$$

چون $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ محور تقارن است و $x = 4$ ریشه معادله است پس ریشه دیگر $x = -2$ است. پس ریشه دیگر $x = 8$ یا $x = -2$ است.

